МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
функционального анализа
и операторных уравнений

Каменский М.И.
подпись, расшифровка подписи
19.05.22г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.02 Методы функции Грина исследования краевых задач

1. Код и наименование направления подготовки: 02.04.01 математика и компьютерные науки.

2. Профиль подготовки: математическое и компьютерное моделирование
3. Квалификация выпускника: магистр

4. Форма образования: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: функционального анализа и операторных уравнений

6. Составители программы: Белоглазова Татьяна Владимировна, к.ф.-м.н., доцент,

7. Рекомендована: НМС математического факультета, протокол № 0500-03 от 24.03.2022г.

8. Учебный год: 2022-2023 **Семестр(ы):** первый

9. Цели и задачи учебной дисциплины:
Целями освоения учебной дисциплины являются: изучение различных методов функции Грина при исследовании краевых задач.
Задачи учебной дисциплины: научить студентов пользоваться при решении конкретных краевых задач методами функции Грина.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: учебная дисциплина Методы функции Грина исследования краевых задач относится к к части, формируемой участниками образовательных отношений, блока Б1.

Основные дисциплины и их разделы, необходимые для усвоения курса

«Методы функции Грина исследования краевых задач»:
– «Математический анализ» (производная и дифференциал функции, неопределенный и определенный интегралы, частные производные, непрерывность);
– «Дифференциальные уравнения» (дифференциальные уравнения высших порядков, линейные дифференциальные уравнения и системы, краевые задачи);
– «Алгебра», «Линейная алгебра» (матрицы, определители, теоремы о разрешимости линейных систем).
– «Вариационное исчисление» (вариация функционала)
Дисциплина «Методы функции Грина исследования краевых задач» является необходимой для усвоения учебных курсов по математическому моделированию механических систем, физике.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-2	Способен проводить работы по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований в области математического и компьютерного моделирования различных процессов	ПК-2.1	Владеет навыками анализа научно-технической литературы по тематике проводимых исследований на русском и других языках	Знать: методы анализа научнотехнической литературы Уметь: проводить анализ научнотехнической литературы по теории полугрупп линейных ограниченных операторов Владеть: навыками анализа научнотехнической литературы по теории полугрупп ограниченных операторов
		ПК-2.2	Умеет обрабатывать, анализировать и обобщать полученную информацию с целью решения научных задач	Знать: область применения тех или методов построения математических моделей Уметь: адекватно интерпретировать параметры сетевых технических систем Владеть: навыками обработки полученной информации для построения адекватных математических моделей
		ПК-2.3	Имеет практический опыт исследований в конкретной области математического и компьютерного моделирования	Знать: методы формализации задач, возникающих при описании процессов в сетевых технических системах; основные методы исследования дифференциальных уравнений на пространственных сетях, моделирующих процессы, возникающие в непрерывных системах сетеподобной структуры Уметь: правильно выбрать методы решения полученных задач; моделировать процессы, возникающие в непрерывных системах сетеподобной структуры системами дифференциальных уравнений на графах Владеть: практическими навыками решения полученных задач; навыками моделирования практических задач системами дифференциальных уравнений

12 Объем дисциплины в зачетных единицах/часах — 3/108.

Форма промежуточной аттестации – зачет

13. Виды учебной работы:

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость			
		Всего	По семестрам		
			№ 1		
Аудиторные занятия		32	32		
в том числе:	лекции	-	-		
	практические	32	32		
	лабораторные	-	-		
Самостоятельная работа		76	76		
в том числе: курсовая работа (проект)		-	-		
Форма промежуточной аттестации *(зачет – _1 час.)*		*зачет*	зачет		
Итого:		108	108		

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
2. Практические занятия			
2.1	Функция Грина на отрезке	Основные определения теории краевых задач на отрезке. Функция Грина краевой задачи 2-го порядка на отрезке. Методы построения Функция Грина краевой задачи 2-го порядка на отрезке. Функция Грина краевой задачи 4-го порядка на отрезке. Методы построения Функция Грина краевой задачи 4-го порядка на отрезке.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11891
2.2	Функция Грина на графе	Основные определения теории краевых задач на графе. Функция Грина краевой задачи на графе (ее построение, представление решения краевой задачи в интегральном виде). Функция Грина краевой задачи 2-го порядка на графе. Методы построения Функция Грина краевой задачи 2-го порядка на графе с помощью пакета прикладных программ. Функция Грина краевой задачи 4-го порядка на графе. Методы построения Функция Грина краевой задачи 4-го порядка на графе с помощью пакета прикладных программ.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11891
2.3	Свойства функция Грина	Свойства функции Грина краевой задачи на графе (непрерывность, симметричность, знакорегулярность). Принцип максимума. Метод редукции. Факторизация дифференциального оператора.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11891
3. Лабораторные занятия			

13.2 Темы (разделы) дисциплины и виды занятий:

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
	Функция Грина на отрезке		6		14	20
	Функция Грина на графе		14		32	46
	Свойства функция Грина		12		30	42
	Итого:		32		76	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий (практических занятий) и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность, на которую отводится 76 часов.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Методы функции Грина исследования краевых задач» предполагает выполнение следующих заданий:

1) самостоятельное изучение учебных материалов по разделам 1-4 с использованием основной и дополнительной литературы, информационно-справочных и поисковых систем;

2) подготовку к текущим аттестациям: выполнение практических заданий, самостоятельное освоение понятийного аппарата по каждой теме.

Особое внимание обучающихся направляется на освоение практических методов дифференцирования, интегрирования, решения алгебраических, дифференциальных и интегральных уравнений. Качественное выполнение практических работ подразумевает полноценное изучение и максимальное задействование всех предоставленных обучающимся информационно-коммуникационных ресурсов. Приоритетной является работа с общедоступными современными пакетами программ.

Вопросы практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к занятиям обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям (1 семестр – зачет)

Все выполняемые студентами самостоятельно задания подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (1 семестр – зачет).

В случае необходимости перехода на дистанционный режим обучения используется электронный курс «Методы функции Грина исследования краевых задач» (URL:https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=11891) на портале «Электронный университет ВГУ».

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	*Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л., Прядиев. Боровских. К.П. Лазарев, С.А. Шабров -М. : Физматлит, 2004. – 272 с.*

2.	**Арнольд В. И**. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений : Учеб.пособие для физико-мат.спец.вузов / В. И. Арнольд .— М. : Наука: Физматлит, 1978 .— 304 с

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3.	*Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк – М.: Наука, 1969. - с.*
4.	*Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке – М.: Физматлит, 1961. - с.*
5.	**Боровских А. В**. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям : [учебник] / А.В. Боровских, А.И. Перов .— 2-е изд., испр. и доп. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2014 .— 548 с.
6.	**Красносельский М. А**. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский .— М. : Наука, 1966 .— 331 с
7.	**Петровский И. Г.** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : Учебник для студ. мех.-мат. специальностей ун-тов / И.Г. Петровский ; Под ред. А.Д. Мышкиса, О.А. Олейника .— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1984 .— 295 с.
8.	**Понтрягин Л. С**. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник для студ. мат. спец. ун-тов / Л.С. Понтрягин .— 5-е изд. — М. : Наука, 1982 .— 331 с
9	*Белоглазова Т.В. О положительной обратимости разнопорядковых задач на графах / кандидатская диссертация – Воронеж, 2003. – 128 С.*
10	***Филиппов А. Ф***. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов .— М. ; Ижевск : РХД, 2000 .— 174 с.*

в) информационные электронно-образовательные ресурсы**:**

№ п/п	ИсточникП
1	Научная Зональная библиотека Воронежского государственного университета : Электронный каталог : https://www.lib.vsu.ru/ .

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы *(учебно-методические рекомендации, пособия, задачники, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)*

№ п/п	Источник
1.	*Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л., Прядиев. Боровских. К.П. Лазарев, С.А. Шабров -М. : Физматлит, 2004. – 272 с.*
2.	**Арнольд В. И**. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений : Учеб.пособие для физико-мат.спец.вузов / В. И. Арнольд .— М. : Наука: Физматлит, 1978 .— 304 с
3.	*Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк – М.: Наука, 1969. - с.*
4.	*Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке – М.: Физматлит, 1961. - с.*
5.	**Боровских А. В**. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям : [учебник] / А.В. Боровских, А.И. Перов .— 2-е изд., испр. и доп. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2014 .— 548 с.
6.	**Красносельский М. А**. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский .— М. : Наука, 1966 .— 331 с
7.	**Петровский И. Г.** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : Учебник для студ. мех.-мат. специальностей ун-тов / И.Г. Петровский ; Под ред. А.Д. Мышкиса, О.А. Олейника .— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1984 .— 295 с.
8.	**Понтрягин Л. С**. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник для студ. мат. спец. ун-тов / Л.С. Понтрягин .— 5-е изд. — М. : Наука, 1982 .— 331 с

9.	*Белоглазова Т.В. О положительной обратимости разнопорядковых задач на графах / кандидатская диссертация – Воронеж, 2003. – 128 С.*
10.	***Филиппов А. Ф***. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов .— М. ; Ижевск : РХД, 2000 .— 174 с.*

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации дисциплины используются следующие образовательные технологии: логическое построение дисциплины, установление межпредметных связей, обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале, актуализация личного и учебно-профессионального опыта обучающихся, включение элементов дистанционных образовательных технологий.

В практической части курса используется стандартное современное программное обеспечение персонального компьютера.

В части освоения материала лекционных и лабораторных занятий, самостоятельной работы по отдельным разделам дисциплины, прохождения текущей и промежуточной аттестации может применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии, в частности, электронный курс «Методы функции Грина исследования краевых задач» *(*URL:https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=11891*) на* портал*е* «Электронный университет ВГУ».

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория: специализированная мебель

19. Фонд оценочных средств:

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Функция Грина на отрезке	ПК-2	ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3	Домашнее задание, устный опрос, доклады
2.	Функция Грина на графе	ПК-2	ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3	Домашнее задание, устный опрос, доклады
3.	Свойства функция Грина	ПК-2	ПК-2.1 ПК-2.2 ПК-2.3	Домашнее задание, устный опрос, доклады
Промежуточная аттестация форма контроля – зачёт				Перечень вопросов Практическое задание

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета.

Текущая аттестация проводится в форме практических заданий.

1.Домашнее задание выполняется каждым студентом самостоятельно и обсуждается на следующем занятии.

2. Студенты тренируются дома моделировать практических задач системами дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков с помощью прикладных пакетов или создают свои программы и демонстрируют результаты на занятии.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено», «не зачтено». Критерии оценивания результатов обучения при текущей аттестации.

Для оценивания результатов практической работы используется ***шкала:*** «зачтено», «не зачтено».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения показаны в следующей таблице:

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
При выполнении практических заданий студент продемонстрировал в достаточной мере: знание основ составления компьютерных программ для решения типовых математических задач, имеющихся ресурсов для решения прикладных математических задач, умение использовать стандартные пакеты программного обеспечения для решения типовых математических задач, владение навыками хранения, поиска, сбора, систематизации, обработки и использования информации.	Достаточный уровень	Зачтено
При выполнении практических заданий студент не продемонстрировал в достаточной мере: знание основ составления компьютерных программ для решения типовых математических задач, имеющихся ресурсов для решения прикладных математических задач, умение использовать стандартные пакеты программного обеспечения для решения типовых математических задач, владение навыками хранения, поиска, сбора, систематизации, обработки и использования информации.	–	Не зачтено

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация в 1 семестре по дисциплине заключается в собеседовании по теоретическим вопросам и выполнения практического задания.

Перечень вопросов к зачету:

1. Основные определения теории краевых задач на отрезке.
2. Функция Грина краевой задачи 2-го порядка на отрезке.
3. Методы построения Функция Грина краевой задачи 2-го порядка на отрезке.
3. Функция Грина краевой задачи 4-го порядка на отрезке.
4. Методы построения Функция Грина краевой задачи 4-го порядка на отрезке.
5. Основные определения теории краевых задач на графе.
6. Функция Грина краевой задачи на графе (ее построение, представление решения краевой задачи в интегральном виде).
7. Функция Грина краевой задачи 2-го порядка на графе.
8. Методы построения Функция Грина краевой задачи 2-го порядка на графе.
9. Функция Грина краевой задачи 4-го порядка на графе.
10. Методы построения Функция Грина краевой задачи 4-го порядка на графе.

11. Свойства функции Грина краевой задачи на графе (непрерывность, симметричность, знакорегулярность).
12. Принцип максимума.
13. Метод редукции.
14. Факторизация дифференциального оператора.

Примеры практических заданий на зачете

Вариант 1

Для задачи

$$\begin{cases} e^{x}u_1'' = f_1(x), \\ -u'' = f_2(x), \\ u_1(0) = 0, \\ u_2\left(e^2\right) = 0, \\ u_1(e-0) - u_2(e+0) = 0, \\ u_1''(0) = 0, \\ u_1''(e-0) = 0, \\ u'(e-0) - u_2'(e+0) = 0. \end{cases}$$

1. установить невырожденность;
2. построить функции Грина двухточечных задач;
3. построить функцию Грина общей задачи.

Для оценивания результатов обучения на зачете используются следующие **показатели:**
1) знание теоретических основ;
2) умение решать практические задачи;
3) умение работать с алгоритмами методов решения практических задач;
4) знание основ методов решения типовых задач;
5) успешное прохождение текущей аттестации.

Для оценивания результатов обучения на зачете используется **шкала:** «зачтено», «не зачтено».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения:

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Полное соответствие ответа обучающегося всем перечисленным показателям по каждому из вопросов контрольно-измерительного материала. Умение применять на практике методы и средства для решения типовых задач, эффективного использования ресурсов современных глобальных сетей в исследованиях.	*Повышенный уровень*	Зачтено
Несоответствие ответа обучающегося одному из перечисленных показателей (к одному из вопросов контрольно-измерительного материала) и правильный ответ на дополнительный вопрос в пределах программы.	*Базовый уровень*	Зачтено

Несоответствие ответа обучающегося любым двум из перечисленных показателей и неправильный ответ на дополнительный вопрос в пределах программы.	*Пороговый уровень*	Зачтено
Несоответствие ответа обучающегося любым из перечисленных показателей (в различных комбинациях по отношению к вопросам контрольно-измерительного материала). В ответе на основные вопросы содержатся отрывочные знания основ, способствующих решению задач профессиональной деятельности , допускаются грубые ошибки при демонстрации умений применять на практике методы для решения типовых задач.	–	Не зачтено

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

<u>1) закрытые задания (тестовые, средний уровень сложности):</u>

1. Установите соответствие:

1 Однородная краевая задача	А) $\begin{cases} Lu = 0; \\ l_i(u) = 0, i = \overline{1,n} \end{cases}$
2 Полуоднородная краевая задача	Б) $\begin{cases} Lu = f(x); \\ l_i(u) = 0, i = \overline{1,n} \end{cases}$.
3 Неоднородная краевая задача	В) $\begin{cases} Lu = f(x); \\ l_i(u) = a_i, i = \overline{1,n} \end{cases}$

<u>Ответ: 1 А , 2 Б, 3 В</u>

<u>Решение.</u>

Если Lu - дифференциальный оператор, $l_i(u), i = \overline{1,n}$ - краевые условия, то $\begin{cases} Lu = f(x); \\ l_i(u) = a_i, i = \overline{1,n} \end{cases}$ - неоднородная краевая задача, $\begin{cases} Lu = f(x); \\ l_i(u) = 0, i = \overline{1,n} \end{cases}$ - полуоднородная краевая задача, $\begin{cases} Lu = 0; \\ l_i(u) = 0, i = \overline{1,n} \end{cases}$ - однородная краевая задача

2. Установите соответствие:

1 краевая задача	А) $\begin{cases} u''(x) = f(x), x \in [a,b]; \\ u(a) = 0; \\ u'(a) = 0. \end{cases}$
2 задача Коши	Б) $\begin{cases} u''(x) = f(x), x \in [a,b]; \\ u(a) = 0; \\ u(b) = 0. \end{cases}$.

Ответ: 1 Б , 2 А

Решение.

Краевой задачей на отрезке $[a,b]$ называют задачу о нахождении решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего краевым (граничным) условиям на концах отрезка $[a,b]$.
Задачей Коши на отрезке $[a,b]$ называют задачу о нахождении решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям.

3. Установите соответствие:

1 решение невырожденной краевой задачи на отрезке можно записать в виде	А) $u(x)=\int\limits_{\Gamma} G(x,s)\,f(s)ds$
2 решение невырожденной краевой задачи на графе можно записать в виде	Б) $u(x)=\int\limits_{a}^{b} G(x,s)\,f(s)ds$.

Ответ: 1 Б , 2 А

Решение.

Решение невырожденной краевой задачи на отрезке $[a,b]$ можно записать в виде

$$u(x)=\int\limits_{a}^{b} G(x,s)\,f(s)ds.$$

Решение невырожденной краевой задачи на графе Г можно записать в виде

$$u(x)=\int\limits_{\Gamma} G(x,s)\,f(s)ds.$$

4. Установите соответствие:

1 Функцией Грина двух переменных x и s на отрезке для краевой задачи *2*-го порядка будем называть	А) функцию $G(x,s)$, при каждом фиксированном s из отрезка, обладающую свойствами: 1. при $x \neq s$ $G(x,s)$ удовлетворяет по x однородному дифференциальному уравнению; 2. при $x \neq s$ $G(x,s)$ удовлетворяет по x краевым условиям; 3. $G(s+0,s)=G(s-0,s)$ при $x=s$, 4. $G_x{}'(s+0,s)=G_x{}'(s-0,s)+\dfrac{1}{p(x)}$ при $x=s$, (где $p(x)$ - коэффициент при старшей производной дифференциального уравнения порядка 2).
2 Функцией Грина $G(x,s)$ на отрезке для краевой задачи 4-го порядка будем называть	Б) функцию двух переменных x и s, при каждом фиксированном s из отрезка, обладающую свойствами: 1. при $x \neq s$ $G(x,s)$ удовлетворяет по x однородному дифференциальному уравнению;

	2. при $x \neq s$ $G(x,s)$ удовлетворяет по x краевым условиям; 3. $\frac{\partial^k}{\partial x^k}G(s+0,s)=\frac{\partial^k}{\partial x^k}G(s-0,s), \quad k=\overline{0,2}$ при $x=s$, 4. $\frac{\partial^k}{\partial x^k}G(s+0,s)=\frac{\partial^k}{\partial x^k}G(s-0,s)+\frac{1}{p(x)}, \quad k=3$ при $x=s$, (где $p(x)$ - коэффициент при старшей производной дифференциального уравнения порядка 4).
3 Функцией Грина $G(x,s)$ на отрезке для краевой задачи *n*-го порядка будем называть	В) функцию двух переменных x и s, при каждом фиксированном s из отрезка, обладающую свойствами: 1. при $x \neq s$ $G(x,s)$ удовлетворяет по x однородному дифференциальному уравнению; 2. при $x \neq s$ $G(x,s)$ удовлетворяет по x краевым условиям; 3. при $x = s$ непрерывна по x, т.е. $\frac{\partial^k}{\partial x^k}G(s+0,s)=\frac{\partial^k}{\partial x^k}G(s-0,s), \quad k=\overline{0,n-2}$, 4. при $x = s$ имеет скачек, т.е. $\frac{\partial^k}{\partial x^k}G(s+0,s)=\frac{\partial^k}{\partial x^k}G(s-0,s)+\frac{1}{p(x)}, \quad k=n-1$, (где $p(x)$ - коэффициент при старшей производной дифференциального уравнения порядка n).

Ответ: 1 А , 2 Б, 3 В

Решение.

Функцией Грина $G(x,s)$ на отрезке для краевой задачи *n*-го порядка будем называть функцию двух переменных x и s, при каждом фиксированном s из отрезка, обладающую свойствами:

1. при $x \neq s$ $G(x,s)$ удовлетворяет по x однородному дифференциальному уравнению;

2. при $x \neq s$ $G(x,s)$ удовлетворяет по x краевым условиям;

3. при $x = s$ непрерывна по x, т.е.

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}G(s+0,s)=\frac{\partial^k}{\partial x^k}G(s-0,s), \quad k=\overline{0,n-2},$$

4. при $x = s$ имеет скачек, т.е.

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} G(s+0,s) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} G(s-0,s) + \frac{1}{p(x)}, \quad k = n-1,$$

(где $p(x)$ - коэффициент при старшей производной дифференциального уравнения порядка n).

5. Выберите один из 5 вариантов ответа

Неоднородную задачу назовем невырожденной, если….

Выберите один из 5 вариантов ответа:

1) соответствующая ей однородная задача не имеет тривиального решения
2) соответствующая ей однородная задача имеет только тривиальное решение
3) соответствующая ей однородная задача не имеет только постоянное решение
4) соответствующая ей однородная задача не имеет решений
5) соответствующая ей однородная задача не существует

Ответ: 2

Решение:

Неоднородную задачу назовем невырожденной, если соответствующая ей однородная задача имеет только тривиальное решение.

6. Выберите один из 5 вариантов ответа

Функцию $G(x,s)$ невырожденной задачи 2–го порядка на графе, состоящем из n ребер можно построить по формуле ….

Выберите один из 5 вариантов ответа:

1) $$G(x,s) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} H(x,s) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ l_1(H(\cdot,s)) & l_1(\varphi_1) & \dots & l_1(\varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_n(H(\cdot,s)) & l_n(\varphi_1) & \dots & l_n(\varphi_n) \end{vmatrix}, \quad \text{где} \quad \Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ l_n(\varphi_1) & \dots & l_n(\varphi_n) \end{vmatrix},$$

$\varphi_i(x), \quad i = \overline{1,2}$ – фундаментальная система решений однородного уравнения, а $l_j(\varphi_i(x)), \quad j = \overline{1,n}$ реализация краевых условий, функция $H(x,s)$ строится по функциям Грина двухточечных задач на ребрах графа.

2) $$G(x,s) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} H(x,s) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ l_1(H(\cdot,s)) & l_1(\varphi_1) & \dots & l_1(\varphi_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{2n}(H(\cdot,s)) & l_{2n}(\varphi_1) & \dots & l_{2n}(\varphi_{2n}) \end{vmatrix}, \quad \text{где} \quad \Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{2n}(\varphi_1) & \dots & l_{2n}(\varphi_{2n}) \end{vmatrix},$$

$\varphi_i(x), \quad i = \overline{1,2}$ – фундаментальная система решений однородного уравнения, а $l_j(\varphi_i(x)), \quad j = \overline{1,2n}$ реализация краевых условий, функция $H(x,s)$ строится по функциям Грина двухточечных задач на ребрах графа.

3) $G(x,s)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} H(x,s) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ l_1(H(\cdot,s)) & l_1(\varphi_1) & \dots & l_1(\varphi_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{2n}(H(\cdot,s)) & l_{2n}(\varphi_1) & \dots & l_{2n}(\varphi_{2n}) \end{vmatrix}$, где $\Delta=\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{2n}(\varphi_1) & \dots & l_{2n}(\varphi_{2n}) \end{vmatrix}$,

$\varphi_i(x),\quad i=\overline{1,2n}$ – фундаментальная система решений однородного уравнения, а $l_j(\varphi_i(x)),\quad j=\overline{1,2n}$ реализация краевых условий, функция $H(x,s)$ строится по функциям Грина двухточечных задач на ребрах графа.

4) $G(x,s)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} H(x,s) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ l_1(H(\cdot,s)) & l_1(\varphi_1) & \dots & l_1(\varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_n(H(\cdot,s)) & l_n(\varphi_1) & \dots & l_n(\varphi_n) \end{vmatrix}$, где $\Delta=\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ l_n(\varphi_1) & \dots & l_n(\varphi_n) \end{vmatrix}$,

$\varphi_i(x),\quad i=\overline{1,2}$ – фундаментальная система решений однородного уравнения, а $l_j(\varphi_i(x)),\quad j=\overline{1,2}$ реализация краевых условий, функция $H(x,s)$ строится по функциям Грина двухточечных задач на ребрах графа.

5) $G(x,s)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} H(x,s) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ l_1(H(\cdot,s)) & l_1(\varphi_1) & \dots & l_1(\varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_n(H(\cdot,s)) & l_n(\varphi_1) & \dots & l_n(\varphi_n) \end{vmatrix}$, где $\Delta=\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ l_n(\varphi_1) & \dots & l_n(\varphi_n) \end{vmatrix}$,

$\varphi_i(x),\quad i=\overline{1,2n}$ – фундаментальная система решений однородного уравнения, а $l_j(\varphi_i(x)),\quad j=\overline{1,2n}$ реализация краевых условий, функция $H(x,s)$ строится по функциям Грина двухточечных задач на ребрах графа.

<u>Ответ: 3</u>

<u>Решение:</u>

Функцию $G(x,s)$ невырожденной задачи 2 –го порядка на графе, состоящем из n ребер можно построить по формуле

$$G(x,s)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} H(x,s) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ l_1(H(\cdot,s)) & l_1(\varphi_1) & \dots & l_1(\varphi_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{2n}(H(\cdot,s)) & l_{2n}(\varphi_1) & \dots & l_{2n}(\varphi_n) \end{vmatrix},$$

где $\Delta=\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{2n}(\varphi_1) & \dots & l_{2n}(\varphi_{2n}) \end{vmatrix}$, $\varphi_i(x),\quad i=\overline{1,2n}$ – фундаментальная система решений однородного уравнения, а $l_j(\varphi_i(x)),\quad j=\overline{1,2n}$ реализация краевых условий, функция $H(x,s)$ строится по функциям Грина двухточечных задач на ребрах графа.

2) открытые задания (тестовые, повышенный уровень сложности):

1. Сколько функций составляют фундаментальную систему решений однородного дифференциального уравнения $u''=0$.

Ответ: 2

Решение: $u''=0$, тогда $u'=const=c_1$, $u(x)=\int c_1dx=c_1x+c_2$, следовательно, фундаментальная система решений уравнения состоит из двух функций $\varphi_1(x)=x, \quad \varphi_2(x)\equiv 1$.

2. Решите задачу $u''=0, \quad u(0)=0, \quad u(1)=0$

Ответ: 0

Решение: $u''=0$, тогда $u'=const=c_1$, $u(x)=\int c_1dx=c_1x+c_2$, следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид $u(x)=c_1x+c_2$. Найдем частное решение: $u(0)=c_2=0, \quad u(1)=c_1+c_2=0$, тогда $c_2=0, \quad c_1=0$. Подставляя найденные значения произвольных постоянных в общее решение, получим $u(x)\equiv 0$.

3. При каком значении параметра c задача $u''=f(x), \quad u(0)=0, \quad u(c)=0$ на отрезке $[0,1]$ будет называться краевой?

Ответ: 1

Решение: Краевой задачей на отрезке $[a,b]$ называют задачу о нахождении решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего краевым (граничным) условиям на концах отрезка $[a,b]$.

4. При каком значении параметра c задача $u''=f(x), \quad u(0)=0, \quad u'(c)=0$ на отрезке $[0,1]$ будет называться задачей Коши?

Ответ: 0

Решение: Задачей Коши на отрезке $[a,b]$ называют задачу о нахождении решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям.

5. Решите задачу $u''=0, \quad u(0)=0, \quad u'(0)=0$

Ответ: 0

Решение: $u''=0$, тогда $u'=const=c_1$, $u(x)=\int c_1dx=c_1x+c_2$, следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид $u(x)=c_1x+c_2$. Найдем частное решение: $u(0)=c_2=0, \quad u'(0)=c_1=0$, тогда $c_2=0, \quad c_1=0$. Подставляя найденные значения произвольных постоянных в общее решение, получим $u(x)\equiv 0$.

6. Решите задачу $u''=0, \quad u(0)=1, \quad u(1)=1$

Ответ: 1

Решение: $u''=0$, тогда $u'=const=c_1$, $u(x)=\int c_1dx=c_1x+c_2$, следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид $u(x)=c_1x+c_2$. Найдем частное решение:

$u(0)=c_2=1,\quad u(1)=c_1+c_2=1$, тогда $c_2=1,\quad c_1=0$. Подставляя найденные значения произвольных постоянных в общее решение, получим $u(x)\equiv 1$.

7. Решите задачу $u''=0,\quad u(0)=2,\quad u'(0)=0$

Ответ: 2

Решение: $u''=0$, тогда $u'=const=c_1$, $u(x)=\int c_1dx=c_1x+c_2$, следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид $u(x)=c_1x+c_2$. Найдем частное решение: $u(0)=c_2=2,\quad u'(0)=c_1=0$, тогда $c_2=2,\quad c_1=0$. Подставляя найденные значения произвольных постоянных в общее решение, получим $u(x)\equiv 2$.

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов — указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).